
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. FRANCHI

STIME SUB-ELLITTICHE E METRICHE RIEMANNIANE SINGOLARI

PARTE II

24 MARZO 1983

1. Nella prima parte di questo seminario è stato introdotto il concetto di vettore sub-unitario rispetto a una famiglia di campi vettoriali su aperto di \mathbb{R}^n e, sotto opportune ipotesi, è stata introdotta una distanza naturalmente associata alla famiglia di campi vettoriali. Si è visto poi come la stima di questa distanza e la individuazione di percorsi ottimali sia legata a proprietà di immersione di spazi funzionali associati ai campi in opportuni spazi di Sobolev.

In questa parte del seminario vedremo come è possibile presentare in modo differente la distanza e come questa distanza sia, per certi aspetti, una distanza riemanniana singolare.

Richiamiamo alcune definizioni. Sia $X = \{X_1, \dots, X_p\}$ una famiglia di campi vettoriali di classe C^1 su un aperto connesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Una curva $\gamma \subseteq \Omega$ si dirà *X-ammissibile* (*) se

- 1) γ è C^1 a tratti;
- 2) ciascuno dei tratti C^1 di γ è una curva integrale di uno dei campi $\pm X_1, \dots, \pm X_p$.

Diremo che l'aperto Ω è *X-connesso* se $\forall x, y \in \Omega$ esiste una curva X-ammissibile γ che congiunge x e y .

Se $\gamma: [0, T] \rightarrow \Omega$ è una parametrizzazione C^1 a tratti di una curva X-ammissibile tale che $\dot{\gamma}(t) \in \{\pm X_1(\gamma(t)), \dots, \pm X_p(\gamma(t))\}$ q.d., porremo $l(\gamma) = T$.

Se Ω è X-connesso, possiamo allora dare la definizione seguente:

$$(1.1) \quad \forall x, y \in \Omega \text{ poniamo}$$

(*) Questa definizione è più restrittiva di quella data nel seminario precedente. Usiamo ancora questa terminologia per non appesantire le notazioni.

$$d(x,y) = \inf\{l(\gamma); \gamma \text{ X-ammissibile, } \gamma \text{ connette } x \text{ e } y\} .$$

La funzione d così definita è ovviamente una distanza. In questo seminario vedremo come questa distanza sia equivalente a quella costruita a partire da vettori sub-unitari e come il problema di determinare d sia naturalmente formulabile in termini di controlli ottimi.

Evidentemente l'ipotesi X -connessione per Ω gioca un ruolo essenziale per la definizione di d . Premettiamo allora alcune considerazioni su questa ipotesi.

Supponiamo che i campi X_1, \dots, X_p siano C^∞ su Ω . Indichiamo con G l'algebra di Lie generata da X_1, \dots, X_p ; è stato provato nel seminario precedente che, se il rango di G è costante ed uguale a n su tutto Ω , allora Ω è X -connesso ed è stata data una stima esplicita della distanza. La prima parte di questo risultato è, d'altra parte, contenuta nel teorema di Chow-Hermann ([4], Cap. 18). Ora, se $\text{rango } G = k$ costante su Ω , la condizione $k = n$ è anche necessaria per la X -connessione di Ω (per il teorema di Frobenius), mentre questo non è più vero se il rango di G non è costante. Si consideri ad esempio questa situazione:

$$(1.2) \quad \Omega = \mathbb{R}^2, \quad p = n = 2, \quad X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \phi(x_1) \partial_2, \quad \text{dove}$$

$$\phi(x_1) > 0 \text{ per } x_1 \neq 0, \quad \phi^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} .$$

Ora, nel caso C^∞ , una caratterizzazione della X -connessione è stata data da Sussmann ([8]). Per potere formulare questa condizione, è necessario premettere alcune definizioni.

Indichiamo con Δ_X la distribuzione su Ω generata da X , cioè la funzione che ad un punto x di Ω associa lo spazio vettoriale $\Delta_X(x)$ generato da $\{X_1(x), \dots, X_p(x)\}$.

Diremo poi che una distribuzione $x \rightarrow \Delta(x)$ è X -invariante se

$\forall x \in \Omega$ e per ogni k -pla di campi X_{i_1}, \dots, X_{i_k} e per ogni k -pla di numeri reali t_1, \dots, t_k , il differenziale della applicazione

$$x \rightarrow g(x) = e^{t_k X_{i_k}} \dots e^{t_1 X_{i_1}} x$$

applica $\Delta(x)$ in $\Delta(g(x))$.

La più piccola distribuzione X -invariante che contiene Δ_x verrà indicata con P_X . Si verifica che P_X è ancora una distribuzione C^∞ . Il risultato di Sussmann ([8], Teorema 7.1) può essere così formulato.

(1.3) Ω è X -connesso se e solo se $P_X(x)$ ha dimensione $n \forall x \in \Omega$.

Si può dare una motivazione geometrica della definizione di $P_X(x)$.

In generale, fissato $x \in \Omega$, definiamo *orbita* di X passante per x l'insieme di tutti i punti di Ω che sono connessi a x mediante curve X -ammissibili. Chiameremo ancora orbite di X le classi rispetto alla relazione di equivalenza così ottenuta (la X -connessione di Ω può essere così formulata: Ω è un orbita).

Ogni orbita S può essere dotata di una struttura topologica prendendo la topologia più forte che rende continue le applicazioni $(t_1, \dots, t_k) \rightarrow e^{t_k X_{i_k}} \dots e^{t_1 X_{i_1}} x$ per un dato $x \in S$ al variare di $k \in \mathbb{N}$ e di X_{i_1}, \dots, X_{i_k} in X^k .

Questa topologia non dipende da $x \in S$. S risulta così uno spazio separato e connesso, immerso con continuità in Ω .

In [8] viene provato che per ogni orbita S di X esiste un'unica struttura differenziale su S tale che S è una sottovarietà integrale massimale di P_X (*).

(*) Cioè: 1) $\forall x \in S$ lo spazio tangente in x a S è $P_X(x)$; 2) per ogni sottovarietà Σ connessa che verifichi 1), Σ è una sottovarietà aperta di S .

In altri termini, P_X è la distribuzione le cui varietà integrali massimali sono le orbite di X .

Può essere significativo fare ancora alcune considerazioni per confrontare (1.3) con la condizione sul rango dell'algebra di Lie G . Abbiamo già osservato che, se il rango di G non è costante in Ω , la X -connessione di Ω non dà informazioni sul rango stesso. D'altra parte è invece ovvio che la dimensione di P_X è costante sulle orbite di X : basta tenere presente che se $y = e^{t_k X_{ik}} \dots e^{t_1 X_1} x$, allora $x = e^{-t_1 X_1} \dots e^{-t_k X_{ik}} y$.

È inoltre possibile provare che, se Y_1 e Y_2 sono campi di vettori C^∞ su Ω tali che $Y_i(x) \in P_X(x) \forall x \in \Omega$, $i = 1, 2$, allora $[Y_1, Y_2](x) \in P_X(x) \forall x \in \Omega$. Indicato allora con X^* l'insieme di tutti i commutatori di ogni ordine ottenuti a partire da X_1, \dots, X_p , risulta ovviamente $\Delta_{X^*}(x) \subseteq P_X(x) \forall x \in \Omega$. L'inclusione può essere propria: ad esempio ciò avviene nell'esempio (1.2).

Se rango di $G = n$ in ogni punto di Ω , allora $\forall x \in \Omega$ risulta $n = \dim \Delta_{X^*}(x) \leq \dim P_X(x) \leq n$, e quindi il teorema di Chow-Hermann segue da (1.3).

2. Siano X_1, \dots, X_p campi di classe C^1 su Ω . Mostriamo ora come la costruzione della distanza d possa essere interpretata in termini di controlli ottimi. Poiché siamo interessati (in vista delle nostre applicazioni) a fatti locali, supporremo nel seguito $\Omega = \mathbb{R}^n$, X_1, \dots, X_p limitate con tutte le loro derivate. Supporremo inoltre che

$$(2.1) \quad \mathbb{R}^n \text{ è } X\text{-connesso};$$

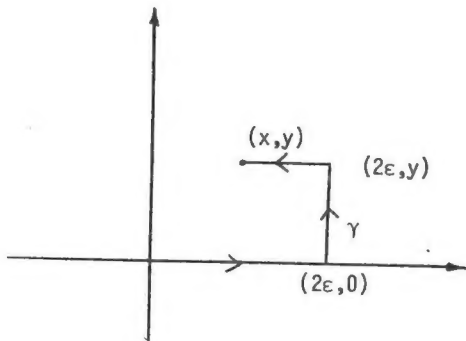
$$(2.2) \quad \text{la distanza } d \text{ è continua rispetto alla topologia euclidea.}$$

L'ipotesi (2.2) è del tutto naturale se si vuole confrontare

la norma $\|u\|_X = (\|u\|_0^2 + \sum_{j=1}^p \|X_j u\|^2)^{1/2}$ con una norma di uno spazio di Sobolev usuale. Infatti, nel caso C^∞ , per il risultato di Fefferman e Phong [2] la hölderianità di d è condizione necessaria e sufficiente per la maggiorazione $\|u\|_{H^\epsilon} \leq C \|u\|_X$ per qualche $\epsilon > 0$.

Osserviamo inoltre che la distanza d può essere continua anche se una stima di questo genere non sussiste. Consideriamo ad esempio il caso (1.2) e verifichiamo che d è continua nell'origine. Sia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che, per fissare le idee, $x > 0$, $y > 0$, e sia $\epsilon > 0$. Scegliamo $x < \epsilon$, $y < \epsilon \phi(2\epsilon)$ e consideriamo la poligonale γ

$$(0,0) \xrightarrow{X_1} (2\epsilon,0) \xrightarrow{X_2} (2\epsilon,y) \xrightarrow{-X_1} (x,y).$$



Il tempo complessivo necessario per percorrere γ sarà $l(\gamma) = 2\epsilon + y/\phi(2\epsilon) + 2\epsilon - x < 5\epsilon$, e dunque $d((0,0), (x,y)) \leq l(\gamma) < 5\epsilon$. Ciò prova la continuità di d .

Una curva X -ammissibile uscente da x_0 è parametrizzata da una funzione $x: [0,T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ assolutamente continua soluzione

$$(2.3) \quad \dot{x} = \sum_{j=1}^p X_j(x) u_j, \quad x(0) = x_0,$$

dove $u = (u_1, \dots, u_p): [0,T] \rightarrow V_p = \{(\pm 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \pm 1)\}$

è una funzione costante a tratti. Indicato con $\Gamma(T)$ l'insieme delle funzioni u così fatte, risulta allora

$$d(x_0, y_0) = \inf\{T; \exists u \in \Gamma(T) \text{ tale che } x(T) = y_0\}.$$

Con questa definizione della distanza d il problema di determinare, se esiste, un percorso γ che realizzi la distanza tra due punti dati e il problema di valutare la distanza tra due punti si traducono in un problema di controllo ottimo per il sistema

$$\dot{x} = \sum_{j=1}^p X_j(x) u_j \quad \text{e funzione costo} \quad \int_0^T dt.$$

Vediamo ora come questa osservazione permette di utilizzare alcuni risultati classici di teoria dei controlli ottimi per ottenere proprietà della distanza d . Seguiremo la presentazione di [5], Parte III.

Indichiamo con A la matrice $[X_1, \dots, X_p]$; allora $\sum_{j=1}^p X_j(x) u_j = A(x) u$. La funzione $A(x) u$ è continua in x e in u e di classe C^1 in x ; inoltre $|\langle x, A(x) u \rangle| \leq C(1 + |x|) \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall u, |u| \leq 1$.

La teoria classica dei controlli ammette in genere una classe più ampia di controlli rispetto a quella da noi considerata; in generale infatti si suppone u solamente misurabile. Vediamo come questo non modifichi la nostra definizione. Poniamo, per x_0 e $y_0 \in \mathbb{R}^n$ assegnati:

$$(2.4) \quad d'(x_0, y_0) = \inf\{T \in \mathbb{R}_+; \exists u: [0, T] \rightarrow V_p \text{ misurabile tale che la soluzione di } \dot{x} = A(x) u, x(0) = x_0 \text{ soddisfa } x(T) = y_0\}.$$

Ovviamente $d'(x_0, y_0) \leq d(x_0, y_0)$; proviamo che $d(x_0, y_0) \leq d'(x_0, y_0)$. Sia $\epsilon > 0$ fissato; per (2.2) esiste $\delta > 0$ tale che, $\forall y \in \mathbb{R}^n, |y - y_0| < \delta$, risulta $d(y, y_0) < \epsilon$. Sia ora $u: [0, T] \rightarrow V_p$ misurabile e $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $x(0) = x_0, x(T) = y_0, \dot{x} = A(x) u$, dove T è tale che $T \leq d'(x_0, y_0) + \epsilon$.

Sia inoltre $u_1: [0, T] \rightarrow V_p$ costante a tratti tale che $\|u - u_1\|_{L^2} < \delta_1$ e sia y la traiettoria corrispondente. $\forall t \in [0, T]$ si ha:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq \int_0^t |\dot{x}(s) - \dot{y}(s)| ds \leq \int_0^t |A(x)u - A(x)u_1| ds + \\ &+ \int_0^t |A(x) - A(y)||u_1| ds \leq C\|u - u_1\|_{L^2} + \int_0^t |x(s) - y(s)| ds. \end{aligned}$$

Dunque, per il lemma di Gronwall, $|x(T) - y(T)| \leq C \delta_1 e^{CT}$; scelto allora δ_1 opportuno, $d(x_0, y_0) \leq d(x_0, y(T)) + d(y(T), y_0) < T + \epsilon \leq d(x_0, y_0) + 2\epsilon$. Ciò prova l'affermazione.

Non è conveniente però utilizzare questa classe di controlli quanto l'insieme V_p non è convesso. D'altra parte (cfr. [5]), Teorema 20.2), se x è una traiettoria corrispondente a un controllo che assume valori in $\text{conv } V$, esiste una traiettoria y corrispondente a un controllo in V che dista (in senso euclideo) meno di ϵ da x . Ragionando come fatto sopra, si può allora provare che si ottiene la stessa distanza sostituendo V_p con $\text{conv } V_p = \{(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tali che } |u_1| + \dots + |u_p| \leq 1\}$.

È ora possibile provare che questa distanza d è equivalente a quella ottenuta con vettori subunitari. Proveremo infatti che, sostituendo $\text{conv } V_p$ con $\overline{S(0,1)}$, si ottiene una distanza equivalente alla data. Indichiamo per il momento con d_ρ la distanza ottenuta prendendo controlli con valore in $\overline{S(0,\rho)}$. Ovviamente si ha:

$$d_{1/\sqrt{p}}(x_0, y_0) \leq d(x_0, y_0) \leq d_1(x_0, y_0).$$

Ma $d_{1/\sqrt{p}}$ e d_1 sono equivalenti, in quanto, per la linearità di $u \rightarrow A(x)u$, passare da un tipo di controlli all'altro equivale a una riparametrizzazione della traiettoria con un parametro proporzionale a quello dato.

D'ora in poi indicheremo con d la distanza ottenuta con controlli in $S(0,1)$.

Osserviamo poi che, essendo $\{A(x)u; u \in \overline{S(0,1)}\}$ convesso, per l'ipotesi di X -connessione, dal Corollario 20.1 di [5] segue che

$$(2.5) \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \text{ esiste un controllo ottimo,}$$

esiste cioè una $u: [0, d(\bar{x}, \bar{y})] \rightarrow \overline{S(0,1)}$ tale che la soluzione di $\dot{x} = A(x)u$, $x(0) = \bar{x}$ è tale che $x(d(\bar{x}, \bar{y})) = \bar{y}$.

La curva $t \rightarrow x(t)$ in questo caso è una curva di minima lunghezza tra x_0 e y_0 . Ci si può chiedere se l'analogia naturale con le curve geodetiche della varietà riemanniana può suggerire qualche modo per studiare queste curve. Vedremo come, fino a un certo punto, questa analogia possa essere utilizzata.

Supponiamo dapprima che $\det A(x) A^T(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$ e che X_1, \dots, X_p siano di classe C^∞ .

Nel seminario precedente si è visto che, in questo caso, la distanza d coincide con la distanza data dalla metrica riemanniana $\langle (A(x) A^T(x))^{-1} \xi, \xi \rangle$.

È noto che i cammini γ tra due punti \bar{x} e \bar{y} di \mathbb{R}^n che minimizzano la lunghezza $\int_0^1 \langle (A(\gamma) A^T(\gamma))^{-1} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2} dt$ minimizzano anche la energia $\int_0^1 \langle (A(\gamma) A^T(\gamma))^{-1} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle dt$ e viceversa purché siano parametrizzati proporzionalmente alla lunghezza d'arco. Sia allora $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ un estremo dell'energia parametrizzato rispetto alla lunghezza d'arco ridotta $(d(\bar{x}, \bar{y}))^{-1} \int_0^t \langle (A(\gamma) A^T(\gamma))^{-1} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2} ds$. L'equazione di Eulero corrispondente sarà

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial \gamma} \langle (A(\gamma) A^T(\gamma))^{-1} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \langle (A(\gamma) A^T(\gamma))^{-1} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle.$$

D'altra parte $\dot{\gamma} \rightarrow \langle (A(\gamma) A^T(\gamma))^{-1} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$ è omogenea di ordine due; dunque coincide con l'Hamiltoniana corrispondente H calcolata nei punti trasformati $x = y$, $p = \frac{\partial}{\partial \dot{\gamma}} \langle (A(\gamma) A^T(\gamma))^{-1} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2(A(\gamma) A^T(\gamma))^{-1} \dot{\gamma}$. Sarà allora

$$\begin{aligned} H(x, p) &= \frac{1}{4} \langle (A(\gamma) A^T(\gamma))^{-1} A(\gamma) A^T(\gamma) p, A(\gamma) A^T(\gamma) p \rangle = \\ &= \frac{1}{4} \|A^T(\gamma) p\|^2 \end{aligned}$$

e la coppia di funzioni x e p soddisferà il sistema seguente equivalente a (2.6):

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{4} \|A^T(x) p\|^2 \\ \dot{p} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{4} \|A^T(x) p\|^2. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \bar{y}) &= \int_0^1 \langle (A(\gamma) A^T(\gamma))^{-1} \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle^{1/2} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \langle (A(\gamma) A^T(\gamma) p, p) \rangle^{1/2} dt = (H(\gamma, p))^{1/2} \end{aligned}$$

(tenendo conto che l'Hamiltoniana è costante sulle sue curve integrali).

Proviamo ora che, anche nel caso degenere, in certe situazioni le equazioni (2.7) ci permettono di valutare la distanza. In generale si ha in ogni caso che:

(2.8) Se (x, p) è una soluzione di

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{4} \|A^T(x) p\|^2 & x(0) &= \bar{x}, \quad x(1) = \bar{y} \\ \dot{p} &= - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{4} \|A^T(x) p\|^2 & t &\in [0, 1], \end{aligned}$$

allora $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq \frac{1}{2} \|A^T(x) p\|$,

(cioè l'energia delle soluzioni è sempre maggiore o eguale alla distanza d tra \bar{x} e \bar{y} al quadrato).

Proveremo la (2.8) successivamente. Vediamo ora come, in una particolare situazione, la (2.8) permetta di concludere che la distanza tra \bar{x} e \bar{y} è uguale alla radice quadrata del livello minimo di energia per il sistema hamiltoniano associato alla matrice A .

Supponiamo $p = n$ e supponiamo $\text{rango } A(x) = n$ su un sottoinsieme denso Γ di \mathbb{R}^n . Per la continuità di d , basterà allora stimare $d(\bar{x}, \bar{y})$ quando $\bar{y} \in \Gamma$.

Siano u e x rispettivamente un controllo ottimo e la traiettoria corrispondente tra \bar{x} e \bar{y} per il sistema $\dot{x} = A(x)u$ (che esistono per (2.5)) definiti su $[0, T]$, $T = d(\bar{x}, \bar{y})$.

Per il principio di massimo di Pontryagin ([5], 23) esiste una funzione $p: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, un numero reale p_0 tali che:

- i) $p(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T]$
- ii) $H^*(x(t), p(t)) = |A^T(x(t)) p(t)| - p_0 = \max\{\langle p(t), A(x(t)) v \rangle - p_0, v \in \overline{S(0,1)}\} \equiv p_0 \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$
- iii) $\dot{p} = - \frac{\partial H^*}{\partial x}(x, p) \quad \forall t \in [0, T]$.

D'altra parte, per ii), o $|A^T(x(t)) p(t)| \equiv 0$ o $|A^T(x(t)) p(t)| > 0 \forall t$; la prima eventualità è esclusa dal fatto che $A^T(x(1)) = A^T(\bar{y})$ è invertibile e $p(1) \neq 0$. Sempre per ii) sarà allora necessariamente

$$u(t) = A^T(x)p / |A^T(x)p|$$

che sostituito in $\dot{x} = A(x)u$ dà

$$\dot{x} = A(x) \frac{A^T(x)p}{|A^T(x)p|}.$$

Indicando con x_1 e con p_1 rispettivamente le funzioni $t \rightarrow x(tT)$ e $t \rightarrow (2T/p_0) p(tT)$, è immediato verificare che (x_1, p_1) soddisfa un sistema analogo a quello di (2.7) e di più $\frac{1}{2} \|A^T(x_1) p_1\| = \frac{T}{p_0} \|A^T(x) p\| = T = d(\bar{x}, \bar{y})$.

Osserviamo che l'ipotesi sul rango della matrice A è stata utilizzata unicamente per escludere la possibilità $A^T(x) p \equiv 0$; le nostre argomentazioni possono allora essere ripetute ogni volta che si può escludere $A^T(x) p \equiv 0$.

Osserviamo ancora che l'Hamiltoniana $\frac{1}{4} \|A^T(x) p\|^2$ è il simbolo principale dell'operatore $-\frac{1}{4} \sum_{j=1}^p x_j^2$.

Consideriamo ora un esempio molto semplice per illustrare questo tipo di formulazione del problema.

Siano X_1 e X_2 i campi in R^2 ∂_1 e $x_1 \partial_2$. Poiché X_1 e $[X_1, X_2]$ generano tutto R^2 , R^2 è X -connesso e la distanza è già stata stimata; ci limiteremo ad applicare i risultati sopra ottenuti per calcolare la distanza tra l'origine e il punto $(0, h)$, $h > 0$. Determineremo esplicitamente le curve di minima lunghezza e vedremo come l'analogia con le varietà riemanniane non possa essere portata oltre un certo limite.

Il sistema (2.7) diventa

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{2} p_1 & \dot{p}_1 &= -\frac{1}{2} x_1 p_2^2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} x_1^2 p_2 & \dot{p}_2 &= 0 \end{aligned} \quad t \in [0, 1] \quad (*)$$

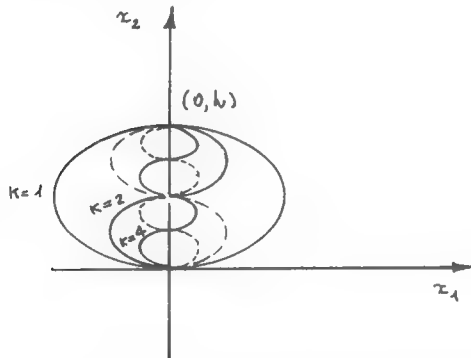
(*) Anche se $\text{rango } A((0, h)) < 2$, qui possiamo escludere che sia $A^T(x)p \equiv 0$. Infatti, se fosse $A^T(x)p \equiv 0$, sarebbe $p_1 \equiv 0$ e quindi $x_1 \equiv 0$ che non è possibile.

$x_1(0) = x_2(0) = 0, x_1(1) = 0, x_2(1) = h$. Le soluzioni di (2.11) saranno da
te da

$$x_1 = \pm \frac{2h}{k\pi} \sin(k\pi t) \quad x_2 = h(t - \sin(2k\pi t)/2k\pi),$$

$$p_1 = \pm 2 \frac{2h}{k\pi} k\pi \cos(k\pi t) \quad p_2 = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Abbiamo quindi una successione di coppie di curve speculari ri-
spetto all'asse y .



In corrispondenza $\frac{1}{4} \|A^T(x,p)\|^2 = \frac{1}{4} \|A^T(x(0)) p(0)\|^2 = \frac{1}{4} p_1(0)^2 = 2k\pi h$; ne
segue che $d((0,0), (0,h)) = 2\pi h$.

Osserviamo ora che, in una varietà riemanniana, fissato un pun-
to x , esiste un intorno W di x e un numero $\epsilon > 0$ tale che ogni coppia di
punti in W può essere congiunta con una geodetica (*unica*) di lunghezza mi-
nore di ϵ . Nel nostro caso questo non si verifica in quanto vi sono sempre
due geodetiche che congiungono l'origine e il punto $(0,h)$ che "realizzano
la distanza".

Proviamo ora (2.8)

Procediamo in questo modo: indichiamo ancora con A la matrice $n \times (p+n)$ $[X_1, \dots, X_p, 0, \dots, 0]$. La distanza associata al problema di controllo ottimo per questa matrice è la stessa d .

Nel seguito, inoltre supporremo sempre che i campi X_j siano C^∞ . Poniamo $A_\varepsilon = [X_1, \dots, X_p, \varepsilon e_1, \dots, \varepsilon e_n]$ dove $e_k = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ e indichiamo con d_ε la distanza associata ad A_ε . Osserviamo che $\det(A_\varepsilon^n(x) A_\varepsilon^T(x)) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Ovviamente, $d_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$. Proviamo che, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,
 $d_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} d(\bar{x}, \bar{y})$.

Se per assurdo questo non si verificasse, esisterebbe una successione $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ tale che $d_{\varepsilon_n}(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{y}) - \eta$.

Sia ora $x_\varepsilon : [0, T_\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una traiettoria ottimale del sistema associato ad A_ε corrispondente al controllo u_ε , sia cioè

$$\dot{x}_\varepsilon = A_\varepsilon(x_\varepsilon) u_\varepsilon, \quad x_\varepsilon(0) = \bar{x}, \quad x_\varepsilon(T_\varepsilon) = \bar{y}, \quad T_\varepsilon = d_\varepsilon(\bar{x}, \bar{y}).$$

Possiamo sempre pensare u_ε prolungato con un vettore costante su $[0, T]$ se $T = d(\bar{x}, \bar{y})$ e x_ε prolungata di conseguenza. Possiamo inoltre supporre che u_{ε_n} converga L^2 -debolmente a u , con $|u| \leq 1$.

Risulta allora, se $t < t'$, $|x_\varepsilon(t) - x_\varepsilon(t')| \leq \int_t^{t'} |A_\varepsilon(x_\varepsilon(s))| ds \leq C(t' - t)$; dunque $\{x_{\varepsilon_n}\}$ è equilimitato ed equicontinuo; possiamo allora supporre $x_{\varepsilon_n} \xrightarrow{\text{unif}} x$. Risulta

$$x_{\varepsilon_n}(t) - \bar{x} = \int_0^t A_{\varepsilon_n}(x_{\varepsilon_n}(s)) u_{\varepsilon_n} ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^t A(x(s)) u ds$$

poiché

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^t (A_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}) u_{\epsilon_n} - A(x) u) ds \right| \leq \int_0^t |(A_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}) - A(x)) u_{\epsilon_n}| ds + \\
& + \left| \int_0^t A(x) (u_{\epsilon_n} - u) ds \right| \leq \int_0^t (|A_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}) - A_{\epsilon_n}(x)| + |A_{\epsilon_n}(x) - \\
& - A(x)|) ds + \left| \int_0^t A(x) (u_{\epsilon_n} - u) ds \right| \leq \\
& \leq \int_0^t (C|x_{\epsilon_n} - x| + \epsilon_n) ds + \left| \int_0^t A(x) (u_{\epsilon_n} - u) ds \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Dunque $\dot{x} = A(x)u$, $x(0) = \bar{x}$. Possiamo inoltre supporre $T_{\epsilon_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_0 \leq T - \eta$.
 Ora $|\bar{y} - x(T_0)| = |x(T_0) - x_{\epsilon_n}(T_{\epsilon_n})| \leq |x_{\epsilon_n}(T_{\epsilon_n}) - x(T_{\epsilon_n})| + |x(T_{\epsilon_n}) - x(T_0)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
 dunque $x(T_0) = \bar{y}$. Ne segue che $T = d(\bar{x}, \bar{y}) \leq T_0 \leq T - \eta$, che è assurdo. Ciò
 prova l'affermazione.

Osserviamo poi che, se $c < 1$, $\epsilon > 0$ $d_{\epsilon}(\bar{x}, \bar{y}) \leq d_{c\epsilon}(\bar{x}, \bar{y})$; dunque
 \bar{x} fissato le funzioni $y \rightarrow d_{\epsilon}(\bar{x}, y)$ convergono uniformemente sui compatti
 alla funzione $y \rightarrow d(\bar{x}, y)$.

Poniamo ora $\sigma(x, p) = \frac{1}{4} |A^T(x) p|^2$ e sia (x, p) soluzione dell'
 equazione di Hamilton

$$(2.10) \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial \sigma}{\partial p} \\ \dot{p} = - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \end{cases} \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = \bar{x}, \quad x(1) = \bar{y}$$

Allora $\sigma(x(t), p(t)) = \tau_0 = \text{cost.}$ Poniamo $\sigma_{\epsilon} = \frac{1}{4} \|A_{\epsilon}^T(x)p\|^2$ e sia $(x_{\epsilon}, p_{\epsilon})$
 soluzione di

$$(2.11) \quad \begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = \frac{\partial \sigma}{\partial p} \\ \dot{p}_\varepsilon = -\frac{\partial \sigma_\varepsilon}{\partial x} \end{cases} \quad t \in [0,1], \quad x_\varepsilon(0) = \bar{x}, \quad p_\varepsilon(0) = p(0)$$

Per quanto abbiamo visto precedentemente, x_ε è una geodetica per la metrica riemanniana $\frac{1}{4} |A_\varepsilon^T(x)|^2$ tra \bar{x} e $\bar{x}_\varepsilon = \bar{x}_\varepsilon(1)$ e

$$d_\varepsilon(\bar{x}, \bar{x}_\varepsilon) \leq (\sigma_\varepsilon(x_\varepsilon, p_\varepsilon))^{1/2}.$$

D'altra parte, possiamo supporre $(x_\varepsilon, p_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{\text{unif.}} (x, p)$ e quindi $|d_\varepsilon(\bar{x}, \bar{x}_\varepsilon) - d(\bar{x}, \bar{y})| \leq |d_\varepsilon(\bar{x}, \bar{x}_\varepsilon) - d(\bar{x}, \bar{x}_\varepsilon)| + |d(\bar{x}, \bar{x}_\varepsilon) - d(\bar{x}, \bar{y})| \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} 0$. Allora $d(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_\varepsilon(\bar{x}, \bar{x}_\varepsilon) \leq \sigma(x, p)^{1/2}$.

Ciò prova (2.8).

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. DERRIDJ: Sur une classe d'opérateurs différentiels elliptiques à coefficients analytiques. Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1970/71, Exposé n. 12.
- [2] C. FEFFERMAN e D.H. PHONG: Subelliptic Eigenvalue Problems, Conference on Harmonic Analysis (Chicago 1981). Wadsworth international mathematics series (1983) 590-606.
- [3] B. FRANCHI e E. LANCONELLI: Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, in corso di stampa su Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino.
- [4] R. HERMANN: Differential Geometry and the Calculus of Variations, Academic Press, New York and London (1968).
- [5] H. HERMES e J.P. LASALLE: Functional Analysis and Time Optimal Control, Academic Press, New York and London (1969).
- [6] L. HÖRMANDER: Hypoelliptic Second-Order Differential Equations. Acta Math., 119 (1967), 147-171.
- [7] L. ROTHSCHILD e E.M. STEIN: Hypoelliptic Differential Operators and nilpotent groups, Acta Math. 137 (1976), 247-320.
- [8] M. SUSSMANN: Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Distributions, Trans. Amer. Math. Soc., 180 (1973), 171-188.